אלו הם אינטגרלים לא אמיתיים, שכן הקטע אינו חסום. אבל ישנו סוג נוסף של אינטגרלים לא אמיתיים – כאשר הפונקציה לא חסומה.

אם הפונקציה אינה מוגדרת באוסף של נקודות . אם אזי f אינט' על

נניח שf אינט' על כל קטע () ואינה חסומה בסביבה ימנית של a. אם קיים נגיד שהאינטגרל הלא אמיתי קיים או ש מתכנס ונגדיר אותו .

באופן דומה, אם לכל f אינט' על הקטע ואינה חסומה בסביבה שמאלית של b נגיד ש קיים או מתכנס אם קיים ונגדיר .

# דוגמאות

1. בקטע .  
   f רציפה על כל קטע ולכן אינט' שם, אבל f אינה חסומה בשום סביבה ימנית של 0.

## הערה

באופן דומה, רואים שלכל , (בניגוד לכך ש אם ורק אם )

1. *האינטגרל לא מתכנס, שכן*

*אם f אינט' על לכל נגדיר אם האגף הימני קיים.*

אם נקח אזי ולכן אפשר לכתוב  
במקרה ששני האינטגרלים הלא אמיתיים קיימים.

נניח שקיימות נקודות כך שf אינה חסומה בסביבת , אבל f אינט' על על קטע .  
אפשר לבדוק אם קיימים האינטגרלים הלא אמיתיים  
ואם כולם קיימים נגדיר באשר .

נניח למשל שf אינט' על לכל .

באופן דומה

לכן המשפטים של אינטגרלים לא אמיתיים תופסים גם לפונקציות לא חסומות.

# הקריטריון של קושי

נניח שf אינט' על לכל ואינה חסומה בשום סביבה ימנית של a. תנאי הכרחי ומספיק לקיום (דהיינו לכך ש) הוא שלכל קיים כך שלכל מתקיים

# קריטריון ההשוואה

באותן הנסיבות תהיינה f,g המוגדרות על המקיימות . אזי:

1. אם אזי
2. אם אזי

# דוגמה

האינטגרל מתכנס לכל ומתבדר לכל .

# משפט

נניח שf אינט' על לכל ואינה חסומה בסביבה ימנית של *a:*

1. *אם עבור x מספיק קרוב לa() מתקיים עבור , אזי מתכנס בהחלט.(ז"א )*
2. *אם לכל מספיק קרוב לa ו אזי מתבדר.*

*"x מספיק קרוב לa" = קיים כך שעבור .*

פונציות בעלות השתנות חסומה  
(Functions of Bounded Variation)

תהי f פונקציה המוגדרת על ותהי T חלוקה של .  
נסמן:

אם הקבוצה חסומה מלעיל, נגיד שf בעלת השתנות חסומה ונסמן   
וקוראים לזה ההשתנות הכללית(Total Variation) של f ב

# משפט

אם f בעלת השתנות חסומה ב, אזי היא חסומה שם.

## הוכחה

יהי . אזי:באשר   
 לכל

# הערה

יש פונקציות רציפות שאינן בעלות השתנות חסומה.

## דוגמה

f רציפה ב. נקבע n ונתבונן בחלוקה   
האיבר הכללי הוא . הסימנים שלהם בהכרח שונים, ולכן , וסה"כ:

לכן אינה חסומה מלעיל, ז"א f איינה בעלת השתנות חסומה ב

# משפט

פונקציה מונוטונית היא בעלת השתנות חסומה על כל קטע קומפקטי.

## הוכחה

תהי חלוקה של . אזי:

# משפט

נניח שf וg בעלות השתנות חסומה ב ו, אזי ו בה"ח ומתקיים:

## הוכחה

1. תרגיל!
2. תהי T חלוקה של אזי:

## מסקנה

סכום והפרש של פונקציות מונוטוניות בקטע קומפקטי הם פונקציות בעלות השתנות חסומה.

# משפט

תהי f בעלת השתנות חסומה ב. אזי היא בעלת השתנות חסומה כל כל קטע . במיוחד אם אזי

## הוכחה

תהי T חלוקה של אזי הינה חלוקה של ו